Apellidos		Número de matrícula	
Nombre		Calificación	

1. Formalizar en el lenguaje de la lógica proposicional *(2 puntos)*

a) Los siguientes enunciados:

- *Si no entrena pero hace estiramientos después del partido, no tendrá una lesión. Pero basta con que no haga estiramientos después del partido y entrene, para que tenga una lesión.*

Identificamos las proposiciones que hay en los enunciados:

- Entrenar: p
- Hacer estiramientos después del partido: q
- Tener una lesión: r

Formalizamos los enunciados:

$(\neg p \wedge q) \longrightarrow \neg r \;,\; (\neg q \wedge p) \longrightarrow r$

- *Es suficiente comprar la botella para ser coleccionista, pero es necesario abrir la botella para disfrutar su contenido.*

- Comprar la botella: p
- Ser coleccionista: q
- Abrir la botella: r
- Disfrutar del contenido de la botella: s

Formalizamos el enunciado:

$(p \rightarrow q) \wedge (s \rightarrow r)$

b) Los siguientes razonamientos:

- *Siempre que voy a la facultad, cojo el metro. Hoy no iré a la facultad. Luego hoy no cogeré el metro.*

  - Ir a la facultad: p
  - Coger el metro: q

  Formalizamos el razonamiento:

  $p \rightarrow q$
  $\neg p$
  $\models \neg q$

- *No iré a Barcelona si no cojo el tren. No conoceré la Sagrada Familia a no ser que vaya a Barcelona. No he conocido la Sagrada Familia. Por lo tanto, no he cogido el tren.*

  - Ir a Barcelona: p
  - Coger el tren: q
  - Conocer la Sagrada Familia: r

  Formalizamos el razonamiento:

  $\neg q \rightarrow \neg p$
  $\neg r \vee p$ (si no voy a Barcelona, no conoceré la Sagrada Familia: $\neg p \rightarrow \neg r$)
  o también (ir a Barcelona CN para conocer la Sagrada Familia: $r \rightarrow p$)
  $\neg r$
  $\models \neg q$

Apellidos		**Número de matrícula**	
Nombre		**Calificación**	

2 - Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). Si la respuesta es negativa decir porqué, y si es afirmativa escribir la correspondiente definición o teorema. *(respuesta correcta +0,5, respuesta incorrecta -0,5, nota mínima* 0*)* *(2 puntos)*

Una fórmula bien formada A se dice que es contingente si existe al menos un contramodelo de dicha fórmula A

FALSO. Se dice que una fórmula es contingente si existe al menos un contramodelo y también un modelo de dicha fórmula A.

Si existe un modelo del conjunto de fórmulas A1, A2, …, An y también de la fórmula B, podemos afirmar que B es consecuencia lógica de A1, A2, …, An

FALSO. B es consecuencia lógica de A1, A2, …, An sii no existe un modelo de A1, A2, …, An que sea contramodelo de B.

Si $A1 \wedge A2 \wedge \ldots \wedge An \wedge \neg B$ es insatisfacible, podemos afirmar que B es consecuencia lógica de A1, A2, …, An

CIERTO. Ya que al no existir un modelo de la conjunción de la conclusión negada con las premisas, no se cumple que existe modelo de las premisas y contramodelo de la conclusión.

Un sistema de cálculo deductivo es válido si para toda fórmula A tal que $\models A$, existe una prueba en dicho cálculo ($\vdash A$)

FALSO. Un sistema de cálculo deductivo es válido si para toda fórmula A deducible en dicho cálculo (|- A), dicha fórmula A es consecuencia lógica (|= A).

Apellidos		Número de matrícula	
Nombre		Calificación	

3.- Demostrar que se cumple la relación de consecuencia lógica en la siguiente argumentación (no pueden utilizarse tablas de verdad ni el método de resolución):

$$\underbrace{(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow r)}_{A} \vDash \underbrace{p \rightarrow (q \rightarrow r)}_{B}$$

(2 puntos)

Recordatorio:

- $\Gamma \mid\!== B \equiv \forall$para toda i ($i(A_i) = V$ $\forall$para todo $A_i \in \Gamma \Rightarrow i(B) = V$)
- $\Gamma \mid\!\neq\!= B \Leftrightarrow \exists$xiste i tal que $i(A_i) = V$ $\forall$para todo $A_i \in \Gamma \wedge i(B) = F$

*) La vía directa parece complicada: cada implicación V se abre en dos posibles casos a estudiar.

*) Probamos la vía indirecta (construcción de un contramodelo) : buscamos i tal que $i(A) = V$ y $i(B) = F$

- $i(B) = F = i(p \rightarrow (q \rightarrow r \wedge s)) \longrightarrow i(p) = V$ y $i(q \rightarrow r \wedge s)) = F$

$\longrightarrow \boxed{i(p) = V}$ y $\boxed{i(q) = V}$ y $i(r \wedge s)) = F$

$i(r) = F$ o $i(s) = F$

<u>1er caso</u>: $\boxed{i(r) = F}$ Hay dos interpretaciones, según sea $i(s)$

$i(A) = i(\,(\,p \rightarrow q\,) \rightarrow (\,q \rightarrow r\,)\,) = F$

V V V F

V F

<u>2º caso</u>: $\boxed{i(s) = F}$ Nuevamente hay dos interpretaciones

$i(A) = i(\,(\,p \rightarrow q\,) \rightarrow (\,q \rightarrow r\,)\,) =$?? depende de cómo sea $i(r)$. Si r es V, entonces

V V V ??

V

$i(A) = i(\,(\,p \rightarrow q\,) \rightarrow (\,q \rightarrow r\,)\,) = V$

V V V V

V V

Hemos encontrado una interpretación, $i(p) = i(q) = i(r) = V$ $i(s) = F$, que hace verdadero el antecedente A y falsa la conclusión B (contramodelo) .

$\Rightarrow$ No hay consecuencia lógica

Apellidos		**Número de matrícula**	
Nombre		**Calificación**	

4. Demostrar la siguiente deducción con el cálculo deducción natural, justificando cada paso *(2 puntos)*

$$T\,[\,(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow r)\,] \vDash p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

1 -	$(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow r)$	premisa
2 -	$\quad p$	supuesto
3 -	$\quad\quad q$	supuesto
4 -	$\quad\quad q \vee \neg p$	introd $\vee$ 3
5 -	$\quad\quad p \rightarrow q$	conmutatividad, def $\rightarrow$ 4
6 -	$\quad\quad q \rightarrow r$	modus ponens, 5, 1
7 -	$\quad\quad r$	modus ponens 3, 6
8 -	$\quad q \rightarrow r$	intr $\rightarrow$ 3, 7
9 -	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	intr $\rightarrow$ 2, 8

(Nota: no es la única solución, aunque sí la más corta)

Apellidos		Número de matrícula	
Nombre		Calificación	

5. Demostrar que la siguiente estructura deductiva es correcta usando el **método de Resolución**:

$$T\,[\, \underbrace{\neg s \wedge (r \rightarrow t)}_{A1},\ \underbrace{\neg r \rightarrow (p \rightarrow q)}_{A2},\ \underbrace{t \rightarrow \neg r}_{A3} \,] \vdash \underbrace{\neg s \wedge \neg(\neg q \wedge p)}_{B}$$

(2 puntos)

- Forma Normal Conjuntiva de premisas y de negación de la conclusión:

FNC de A1: $\neg s \wedge (\neg r \vee t)$ (interdefinición de $\rightarrow$)

FNC de A2: $\neg\neg r \vee (p \rightarrow q)$ (interdefinición de $\rightarrow$) $\equiv r \vee (p \rightarrow q)$ (doble negación) $\equiv$

$\equiv r \vee (\neg p \vee q)$ (interdefinición de $\rightarrow$) $\equiv r \vee \neg p \vee q$ (asociatividad)

FNC de A3: $\neg t \vee \neg r$ (interdefinición de $\rightarrow$)

FNC de $\neg$B: $\neg(\neg s \wedge \neg(\neg q \wedge p))$ $\equiv$ $\neg\neg s \vee \neg\neg(\neg q \wedge p))$ (De Morgan) $\equiv$

$\equiv s \vee (\neg q \wedge p)$ (eliminación de $\neg$) $\equiv$ $(s \vee \neg q) \wedge (s \vee p)$ (distributivitad)

- Forma Clausular (FC) de A1 $\wedge$ A2 $\wedge$ A3 $\wedge$ $\neg$B:

$\{\neg s,\ \neg r \vee t,\ r \vee \neg p \vee q,\ \neg t \vee \neg r,\ s \vee \neg q,\ s \vee p\}$

- Resolución:

1. $\neg s$
2. $\neg r \vee t$
3. $r \vee \neg p \vee q$
4. $\neg t \vee \neg r$
5. $s \vee \neg q$
6. $s \vee p$

7. $\neg q$ (de C1 y C5)
8. p (de C1 y C6)
9. $r \vee \neg p$ (de C3 y C7)
10. r (de C9 y C8)
11. t (de C10 y C2)
12. $\neg t$ (de C10 y C4)
13. $\square$ (de C11 y C12)